

4 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега, теорема Лебега о предельном переходе

▽ (Абс. непр-ть $\int$ -на Лебега) $\int f$ инт. на X . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \mu(A) < \delta, A \in \Sigma, \text{ то } |\int_A f d\mu| < \varepsilon$

! Зам $\int f \geq 0$, то речь идет об абс. непр. мере

▲ 1) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^k \chi_{A_k}(x); X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \Sigma, f$ -инт. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int |f^k| d\mu < \infty$. Фикс. $\varepsilon > 0; \exists N$: при $n \geq N$ $\sum_{k=n}^{\infty} \int |f^k| d\mu < \varepsilon/2$. Тогда $\forall A \in \Sigma, |\int_A f d\mu| = |\sum_{k=1}^{\infty} \int_A f^k d\mu| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_A |f^k| d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} \int_A |f^k| d\mu \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int |f^k| d\mu + \varepsilon/2 \leq \max_{k=1, \dots, N-1} \int |f^k| d\mu + \varepsilon/2$. Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2 \max_{k=1, \dots, N-1} \int |f^k| d\mu}$; if $\mu(A) < \delta$, то док-но

2) f -инт. $\Rightarrow \exists$ прост. инт. g $|f - g| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$, $\forall x \in X$ (из равномер. сх-ты); $|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f - g| d\mu + |\int_A g d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \mu(X) + \varepsilon/2 = \varepsilon$ (убо g пр. $\exists \delta$)

▽ (Лебега о предельн. переходе) If f_n инт. на X , и $f_n \xrightarrow{\mu} f$, и $\exists F(x): |f_n(x)| \leq F(x), \forall n, \forall x \in X$. Тогда $f(x)$ инт., и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

▲ χ_A сх-ты по мере, $\exists f_n \xrightarrow{n.b.} f$ (Д. Рисса) $\Rightarrow f$ инт.; $f_n(x) \leq F(x) \Rightarrow f(x) \leq F(x) \forall x$ (пост. уб) $\Rightarrow f$ инт. $\forall \varepsilon > 0 |\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu| \leq \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{|f_n - f| \geq \varepsilon} |f_n - f| d\mu + \int_{|f_n - f| < \varepsilon} |f_n - f| d\mu \leq \int_{|f_n - f| \geq \varepsilon} 2F(x) d\mu + \varepsilon \mu(X)$. А т.к. $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ (в силу сх-ты по мере), то в силу абс. непр., $\int 2F(x) d\mu < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$